Teorema si f y g son continuas en un intervalo cerrado, c es un numero y si f y g son integrables en (a, b) se cumple que:

1.- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx;\ c = \text{constante}$

2.- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3.- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ siempre que $a < c < b$

4.- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

5.- $\int_a^a f(x) = 0$

6.- Si $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

7.- $\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)dx\right) = f(x)$

Si f(x) algunas veces negativa y otras positiva en (a, b), entonces $\int_a^b (x)dx$ (es la suma algebraica (o numérica) de las áreas que están por debajo y por encima del eje X. También, debido a que la integral definida es independiente de la variable particular que se use; cada una de las variables x, t, u, v, etc. se llama variable muda de integración, esto es:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(v)dv$$

Tabla de Integrales.

1.- $\int_a^b dx = x\Big/_a^b = b - a$

2.- $\int_a^b c\,dx = c\int_a^b dx = cx\Big/_a^b = c(b-a)$

3.- $\int_a^b cf(x) = c\int_a^b f(x)$

4.- $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

5.- $\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

6.- Si f y g son integrables y, si $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)$

7.- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \; si: a < c < b$

8.- $\int_a^a f(x)dx = 0$

9.- $\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)dx\right) = f(x)$

Integral indefinida

$\int f(x)dx$ Notación de la integral indefinida

Propiedades básicas de la integral indefinida

1.- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

2.- $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3.- Si f y g son integrables y $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int f(x)dx \le \int g(x)dx$

4.- $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$

Tabla de integrales.

1.- $\int dx = x + c$

2.- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3.- $\int senx\,dx = -\cos x + c$

4.- $\int \cos x\,dx = senx + c$

5.- $\int tgx\,dx = \log \sec x + c$

6.- $\int ctgx\,dx = \log senx\,dx + c$

7.- $\int \sec x\,dx = \log(\sec x + tgx) + c$

8.- $\int \csc x\,dx = \log(\csc x - ctgx) + c$

9.- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

10.- $\int a^x dx = \frac{a}{\log a} + c;\ a > 0$

11.- $\int e^x dx = e^x + c$

12.- $\int ue^{au} du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1} e^{au} du$

Integración por partes

Si f' y g' son continuas, entonces:

$\int fg' = fg - \int f'g$, también $\int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx = f(x)g(x) - \int \frac{df(x)}{dx} g(x)dx$ o, con la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx = f(x)g(x)\Big|_a^b \frac{df(x)}{dx} g(x)$$

Integración de funciones racionales. Fracciones parciales.

$$\frac{N_1}{D_1}+\frac{N_2}{D_2}=\frac{N_1D_2+N_2D_1}{D_1D_2}=\frac{N_1D_2}{D_1D_2}+\frac{N_2D_1}{D_1D_2}.$$

Función racional propia

N es <u>menor</u> que el grado del polinomio de D, entonces $\frac{N}{D}$

Función racional impropia.

Si el grado de N es <u>mayor</u> o <u>igual</u> que el grado de D.

Sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} A+B&=a\\ \beta A+\alpha B&=b \end{aligned} \Rightarrow \text{ Al multiplicar por } -\beta \text{ a la primera ecuación:}$$

$$\begin{aligned} -\beta(A+B)&=-\beta a\\ \beta A+\alpha B&=b \end{aligned} \Rightarrow \frac{\beta A+\alpha B= \quad b}{B(\alpha-\beta)=-\beta a+b} \Rightarrow B=\frac{-\beta a+b}{\alpha-\beta}$$

Sustituyendo B en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema inicial.

Sea:

$$A+B=a$$

$$\Rightarrow A+\frac{-\beta a+b}{\alpha-\beta}=a \Rightarrow A=a-\left(\frac{-\beta a+b}{\alpha-\beta}\right) \Rightarrow A=a+\frac{\beta a-b}{\alpha-\beta}=\frac{a(\alpha-\beta)+\beta a-b}{\alpha-\beta} \Rightarrow$$

$$A=\frac{a\alpha-a\beta+\beta a-b}{\alpha-\beta};\therefore A=\frac{a\alpha-b}{\alpha-\beta}$$

Supongamos que α es distinta de β ($\alpha\neq\beta$), por tanto:

$$\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=\int\frac{ax+b}{(x+\alpha)(x+\beta)}dx=\int\left(\frac{A}{x+\alpha}+\frac{B}{x+\beta}\right)dx=\int\frac{A}{x+\alpha}dx+\int\frac{B}{x+\beta}dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=A\int\frac{1}{x+\alpha}dx+B\int\frac{1}{x+\beta}dx$$

Integrando por sustitución estas dos integrales se tiene, entonces:

$$\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=A\ln(x+\alpha)+B\ln(x+\beta)+c$$

Por propiedades de los logaritmos:

$$\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=\ln(x+\alpha)^A+\ln(x+\beta)^B$$

Integración por fracciones parciales

Caso I. Factores lineales no repetidos.	Para cada uno de estos factores se escribe un término de la forma:	$\dfrac{A}{x+\alpha}$
Caso II. Factores lineales repetidos.	Por cada factor lineal de multiplicidad r, se escribe la suma:	$\dfrac{A_1}{x+\alpha}+\dfrac{A_2}{(x+\alpha)^2}+\cdots+\dfrac{A_r}{(x+\alpha)^r}$
Caso III. Factores cuadráticos no repetidos.	Por cada uno de los factores escríbase:	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$

La integración de cada una de estas fracciones se verifica por **las fórmulas:**

$$\int \frac{1}{u}du = \ln u + c; \quad \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}tg^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c; \quad \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{u-a}{u+a}\right)+c \text{ y}$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{a+u}{a-u}\right)+c .$$

Caso IV. Factores cuadráticos repetidos.	Por cada factor cuadrático de multiplicidad rescríbase la suma:	$\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\dfrac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\dfrac{A_rx+B_r}{(x^2+px+q)^r}$

La primera de estas fracciones se integra como en el Caso III; cada una de las otras fracciones se integra como sigue:

$$\int \frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A_k}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + \left(B_k - \frac{pA_k}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

La primera integral de la derecha es del tipo $\int u^n du$. Para la segunda integral (después de completar al cuadrado) se aplica iteradamente la formula:

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right].$$

Puesto que todo polinomio es "factorizable" en factores lineales o cuadráticos, con el método de las fracciones parciales se podrá integrar cualquier función racional.